Výuka předmětu MT003 Statistika v kombinovaném studiu.

Předmět MT003 sestává ze dvou částí, a to statistiky a elementární matematiky. Výuka, studijní opory a dílčí zkoušky obou částí předmětu jsou na sobě nezávislé. Forma atestace z předmětu MT003 je celková zkouška (6 kreditů), která je souhrnem dílčích zkoušek.

Garant: Ing. Sylva Skupinová, Ph.D.

Přednášející: Ing. Sylva Skupinová, Ph.D., Doc. RNDr. Miloslav Malec, CSc.

Výuka probíhá ve třech soustředěních, celkem 16 hod., z toho 8 hod. statistika a 8 hod. matematika.

Obsahová náplň matematické části předmětu:

1. Vybrané kapitoly z elementární matematiky – výroky, množiny, algebra reálných čísel, rovnice, nerovnice, reálné funkce – základní vlastnosti, funkce elementární.
2. Zavedení pojmu derivace a integrálu, jejich aplikace.
3. Elementy pravděpodobnosti.

Studijní literatura:

Základní

Malec, M.: Elementární matematika. VŠH, Praha 2007.

Doporučená

Kaňka, M., Henzler, J.: Matematika pro ekonomy.

Ekopress, Praha 1997.

Hindls, R. a kol.: Statistika pro ekonomy.

Professional Publishing, Praha 2007.

Cíle výuky matematické části:

Úkolem výuky matematiky na vysokých školách ekonomického a technického zaměření je jednak rozvíjet logické a analytické myšlení studenta a dále poukázat na možnosti aplikace matematiky při kvantitativním popisu zákonitostí v různých ekonomických disciplínách a statistice v rozsahu, který se vyučuje na VŠH. Cílem výuky matematické části předmětu jsou následující oblasti:

a) Stanovit rozsah, zopakovat a případné rozšířit tu část elementární matematiky, jejíž znalost je nezbytná ve výuce ostatních předmětů ekonomického zaměření a statistiky. (S touto problematikou se student již setkal prakticky na všech typech středních škol. Jedná se tedy z velké části o opakování látky ze střední školy. V dostatečném rozsahu je požadované učivo obsaženo v kap. 1, 2, 3 a 4 publ. (Malec, 2007), dále jen skripta.
b) Seznámit studenta s pojmem derivace a integrál a jejich aplikacemi. Zde je situace složitější. Většina studentů VŠH se s těmito pojmy na střední škole nesetkala, jedná se o obtížnější látku vyžadující hlubší a časově náročné studium. Přihlédneme-li k zaměření studia na VŠH a hodinovému rozsahu předmětu, je nutné volit intuitivní přístup k výkladu látky založený na názorném probírání látky a jednoduchých možnostech aplikace. Učivo je obsaženo v kap. 5 a 6 skript.
c) Elementy pravděpodobnosti. Probírané učivo je matematickým úvodem ke studiu statistických metod, probíraných ve druhé části předmětu, ale i předmětu Kvantitativní metody ve studiu magisterském. K výkladu popisné statistiky postačí partie z elementární matematiky. Pokud se ale mají vyložit alespoň základní metody matematické statistiky, např. popsat vlastnosti výběrových charakteristik, testovat hypotézy, studovat statistické závislosti náhodných veličin, pak se nabízí dvě možnosti: Uvedené metody jen formálně popsat (bez odvození a užití matematiky) – pak ale může nastat situace, že při formulaci metody je užito např. pojmu „kvantily normovaného normálního rozdělení“, kde význam daného sousloví není studentovi znám. Druhou možností je nejzákladnější pojmy vyložit. Proto je ve skriptech zařazena kap. 7, kde je diskutována pravděpodobnost náhodného jevu, její vlastnosti a informace o tom, co je to náhodná veličina a distribuční funkce. Pozornost je věnována normálnímu rozdělení, které má rozsáhlá uplatnění v aplikačních oblastech.

V kombinovaném studiu je kladen zásadní důraz na samostatné studium (viz metodický list předmětu MT003). Jednotlivá soustředění odpovídají uvedeným odstavcům obsahové náplně předmětu.

Výklad látky ve skriptech je názorný, důraz je kladen na základní pojmy a jejich aplikaci. Publikace obsahuje dostatek řešených příkladů. Při jistém úsilí zvládne probíraná témata s úspěchem velká část studentů.

Způsob ověření znalostí studentů je následující:

1. Po skončení prvního soustředění proběhne vstupní test z matematiky v rozsahu výuky probíraného na většině středních škol (25 min.).
2. Na konci druhého soustředění se píše průběžný test (30 min.). Bude obsahovat jednoduché příklady na aplikaci derivace a integrálu.
3. Po ukončení třetího soustředění se lze přihlásit na závěrečný test (45 min.). Termínů je k dispozici množství, není nutné skládat zkoušku na prvních termínech. Lépe je zažít probíranou látku a ponechat si dostatek času na procvičování. Ukázka testů je uvedena v oddíle zabývajícím se studijními oporami.

Složitější vzorce i znění pouček budou mít studenti na všech uvedených testech k dispozici.

Výsledky testů budou vždy v přiměřeném čase k dispozici na informačním systému VŠH.

Nakonec proběhne ústní zkouška (cca 15 min.), kde předmětem diskuse bude závěrečné posouzení analytického uvažování studenta. Výsledná klasifikace je stanovena na základě hodnocení testů a ústní části zkoušky.

Dotazy a diskuse k vstupnímu a průběžnému testu se řeší na konzultacích, resp. pomocí informačního systému VŠH. Konzultace se konají dvakrát týdně, doba konání je vždy k dispozici na informačním systému školy. Důraz je kladen na samostatné studium. Uvedená skripta obsahují probíranou látku a jsou svým obsahem dostatečná. K hlubšímu studiu je uvedena doporučená literatura. Jedná se o učebnice matematiky a statistiky dlouhodobě užívané na VŠE Praha.

Průvodce studiem matematické části předmětu MT003.

Níže uvedeme přehled základních pojmů, jejich vlastnosti a použití té části základů matematiky, která je obsahem předmětu a kterou je třeba zvládnout pro úspěšné vykonání dílčí zkoušky. Probíraná látka patří k základním informacím, které by měl student vysoké školy zvládat. Téma je v podstatě totožné s obsahem skript.

Ad 1. **Vybrané kapitoly z elementární matematiky** – viz skripta, kap. 1, 2,3 a 4

Výrok, výrok složený. Jedná se o elementy matematické logiky. Je nutné zcela rozumět logickým operacím $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ mezi dvěma výroky *A* a *B*.

Např. formulaci: pro libovolná reálná čísla a a b platí $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$; je-li $b \neq 0$, pak $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Množina, operace s množinami. Označení např. $a \in M$.

Algebra reálných čísel. Samozřejmostí je počítání se zlomky, kde je nutné mít na paměti, že $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{1}{0}$ neexistuje. Dále 10^9 je miliarda, $10^{-9} = \frac{1}{10^9}$ je číslo blízké nule, $a^0 = 1$. Pro $a \neq 0$ platí $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$. Znát definice *n*-té odmocniny a vzorce pro počítání s mocninami a odmocninami, tj. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, je-li a ≥ 0, pak rovnice $x^2 = a$ má řešení $x = \pm\sqrt{a}$. Statistická část předpokládá znalost počítání se sumačním symbolem $\sum$: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$. Zřejmě platí $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$, $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Příklad. Jsou dány dva soubory dat $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Jejich kovariance je dána vzorcem $cov = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})$, kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou jejich aritmetické průměry. Úpravou dostáváme $cov = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x}\,y_i - x_i\bar{y} - \bar{x}\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i - \frac{1}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n}\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i - \bar{x}\bar{y}$, tj. výpočtový vzorec pro kovarianci.

Reálné funkce. Definice funkce, její definiční obor – zápis $y = f(x),\ x \to f(x)$.

Konstrukce bodu $[x, f(x)], x \in D(f)$ v souřadném systému. Graf funkce, obor hodnot $H(f)$. Každá přímka rovnoběžná s osou *y*, která prochází na ose *x* číslem $x_0 \in D(f)$ protíná graf funkce právě v jednom bodě.

Elementární funkce. Jedná se o základní funkce, které se nejčastěji vyskytují v různých aplikacích, kde lze pozorovat nějakou funkční závislost mezi sledovanými veličinami. Elementární funkce jsou dány jednoduchým analytickým tvarem, tj. vzorcem, jejich hodnoty jsou základní výbavou matematických programů, lze je nalézt na kalkulátoru. Jedná se o funkce lineární, polynomické (příp. kvadratické), lomené, mocninné, exponenciální a logaritmické. Jejich grafy jsou ve skriptech uvedeny na str. 26 až 28. $D(f)$ a $H(f)$ těchto funkcí je zřejmý. K názvu elementární funkce musí student znát její vzorec a graf, který by měl umět (přibližně, ale výstižně) v souřadném systému načrtnout od ruky. Potíže činí zejména funkce logaritmická, o které se více zmíníme u hesla inverzní funkce.

Tedy např. vzorec $y = a^x,\ a > 0, x \in R$ je předpis pro funkci exponenciální. Její graf pro $a > 1$ viz str. 27. Nakreslete si graf této funkce pro $0 < a < 1$.

Vzorec $y = x^a$ představuje funkci mocninnou.

Např. pro $a = \frac{1}{2}$ dostáváme $y = \sqrt{x}, D(f) = \langle 0, \infty)$,

Pro $\alpha = \frac{1}{3}$ máme $y = \sqrt[3]{x}, D(f) = R$.

Grafy těchto funkcí viz skripta, str. 26.

Operace s funkcemi. Jsou-li dány dvě libovolné funkce $f(x)$ a $g(x)$, lze mezi nimi definovat algebraické operace $f \pm g, f.g, \frac{f}{g}$. Další operací je skládání funkcí: $x \to f\big(g(x)\big)$. Vždy v konkrétním případě je nutné stanovit definiční obor výsledné funkce. Získáme jej řešením příslušných nerovností – viz skripta, kap. 4. Např. nalézt $D(f)$ složené funkce $y = ln\frac{x-1}{x+1}$ vede na řešení nerovnosti $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Nalezněte řešení této nerovnosti. Jsou-li zadané funkce $f(x),\ g(x)$ elementární (základní – viz výše), patří i funkce získané uvedenými operacemi ke třídě funkcí elementárních, které jsou dány analytickým výrazem – vzorcem. Např. funkce $y = \log^2 x$ je opět funkce elementární.

Sudé a liché funkce. Definice těchto pojmů (vyjadřujících symetrii) je nutné spojit s grafickým vyjádřením. Rozumíme zápisu: $f.g$ je sudá (na příslušném definičním oboru) ⇔ jsou-li obě sudé nebo liché. Podobné závěry lze učinit i v dalších operacích. Např. funkce $y = x + \frac{1}{x}$ je lichá na $R - \{0\}$.

Monotonní funkce. Tento pojem zahrnuje čtyři podmnožiny funkcí monotonních, a to: rostoucí, neklesající, klesající a nerostoucí. Tato vlastnost lze psát užitím nerovností. Funkce $y = e^x$ je rostoucí na R, funkce $y = e^{-x}$ je na R funkcí klesající. Načrtněte si jejich grafy.

Periodické funkce. Funkce je periodická, pokud existuje číslo $p > 0$ (volíme to nejmenší) takové, že platí $f(x \pm p) = f(x)$.

Funkce $y = \sin x$ je lichá a má periodu 2π,

$y = \operatorname{tg} x$ je lichou funkcí a má periodu π.

Prosté funkce. Funkce $y = f(x)$ je na množině $M \subset D(f)$ prostá, pokud pro $D(f)$ platí $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkce $y = e^x$ je na R prostá, $H(f) = (0, \infty)$.

Inverzní funkce. Každá prostá funkce $y = f(x)$ definuje novou funkci, která se nazývá inverzní a označuje se symbolem f^{-1}. Platí pro ni předpis $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Graficky viz skripta, obr. 3.11, str. 36.

Funkce $y = 10^x$ je prostá, k ní inverzní funkce se označuje „log“, tedy $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y, y \in (0, \infty)$. Dosazením získáváme $y = 10^{\log y}$, což lze popsat slovy:

Dekadický logaritmus kladného čísla *x* při základu 10 je takové číslo, kterým musíme umocnit základ 10, abychom dostali původní číslo *x*, tedy např. $\log 100 = 2$, $\log \frac{1}{10} = -1$.

Pokud sestrojíme grafy původní funkce $f(x)$ a inverzní funkce $f^{-1}(x)$ do jednoho souřadného systému (nezávisle proměnnou vynášíme v obou případech na osu *x*), pak zjišťujeme, že oba grafy jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Analogicky platí $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, kde číslo *e* značí Eulerovu konstantu.

Bezpodmínečně se vyžaduje znalost vzorců, popisujících vlastnosti logaritmů, viz skripta, str. 29. Logaritmováním výrazu $10^{\log x} = x$ (přirozeným logaritmem) získáváme důležitý vzorec $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Ten říká, že dekadický logaritmus je násobkem přirozeného – viz skripta, str. 27.

Příklad. Veličina R závisí na čase t exponenciálně: $R(t) = R_0 e^{\lambda t}$, kde $\lambda > 0$ je daná kladná konstanta, $R_0 = R(0)$. Spočítejte dobu (označme ji T), při které bude hodnota veličiny $R(t)$ dvojnásobná oproti hodnotě v čase $t = 0$.

Platí tedy $2R_0 = R_0 e^{\lambda t}$, odkud $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Načrtněte graf této funkce.

Posloupnost. Posloupnost aritmetická a geometrická (viz dodatek 1 tohoto textu), geometrická řada.

Rovnice. Řešení rovnic, úpravy rovnic. Rovnice o jedné neznámé má tvar $f(x) = g(x)$, kde f a g jsou dané funkce. Uvedenou rovnici lze anulováním převést na tvar $h(x) = f(x) - g(x) = 0$. Uvědomte si geometrický význam řešení rovnice $f(x) = 0$. Její kořeny se nazývají nulové body funkce f a jsou to body, ve kterých graf této funkce protíná (resp. se dotýká) osu *x*.

Řešit rovnici $f(x) = g(x)$ geometricky znamená nalézt *x*-ové souřadnice průsečíků (resp. dotyky) grafů funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$. Klasickým příkladem je úloha z ekonomie, kdy jde o nalezení rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou.

Student bude bez problémů umět řešit rovnice lineární, kvadratické (v reálném oboru) a jednodušší rovnice iracionální exponenciální a logaritmické (příp. goniometrické). Problémy nebude činit řešení soustavy dvou rovnic lineárních, lineární a kvadratické. Poznamenejme, že řešení všech zde uvedených typů rovnic lze nalézt v kap. 4 skript. Řešení těchto rovnic lze vždy získat analyticky (vzorcem), použitím úprav rovnice a z vlastností elementárních funkcí.

Poznamenejme, že ne všechny rovnice lze vyřešit uvedeným postupem. Tak např. rovnici $x^3 - 3x + 1 = 0$ (což je kubická rovnice) nebo rovnice $e^x + x - 2 = 0$ (rovnice transcendentní) lze vyřešit pouze přibližně užitím numerických metod. (O tom více v magisterském studiu.)

Úloha. Nalezněte průsečíky grafu funkce $y = x^3 - 3x$ s osou *x*.

Úloha. Nalezněte souřadnice průsečíků grafů funkcí $y = -x^2 + 2$ a $y = x + 1$. Jedná se tedy o řešení jedné kvadratické a jedné lineární rovnice.

Ukázka vstupního testu:

1. Nakreslete grafy funkcí $y = x - 1$ a $y = \frac{2}{x}$ do jednoho souřadného systému. (Volte $x = \frac{1}{2}, 1, 2.$) Zjistěte souřadnice jejich průsečíků.
2. Nakreslete graf funkce $y = 2.10^{-x}$. (Volte $x = -1, 0, 1.$) Zjistěte, pro která *x* nabude funkce hodnoty $y = 5$.

Ad 2. **Zavedení pojmu derivace a integrálu. Aplikace.**

Derivace funkce. Derivace funkce lze přesně definovat pouze užitím pojmu „limity“ funkce. Jedná se o základní pojem celé oblasti matematiky – matematické analýzy a nepatří k pojmům snadným. Proto je derivace ve skriptech zavedena intuitivně při použití geometrického názoru.

Důležitým a motivujícím příkladem použití pojmu derivace je zavedení okamžité rychlosti hmotného bodu (I. Newton, 1643 – 1727, anglický fyzik, matematik a astronom), pohybujícího se nerovnoměrně po přímce. Nechť se tento bod nachází v čase *t* v jistém bodě přímky. Během přírůstku času Δt vykoná dráhu délky Δs. Zlomek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ vyjadřuje jeho průměrnou rychlost během času Δt na dráze Δs. Tento zlomek závisí na přírůstku času Δt, není obecně konstantou a nevystihuje tedy veličinu, která by vyjadřovala okamžitou rychlost bodu v čase *t*. Tu poskytuje „mezní“ hodnota zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Je to hodnota (závislá pouze na *t*), ke které se tento zlomek blíží, pokud přírůstek Δt se neomezeně (stále více) blíží k nule. Píšeme $\Delta t \to 0$.

Podle označení, které zavedeme níže, lze psát $v(t) = s'(t)$, což říká, že okamžitá rychlost je derivací dráhy podle času.

Buď tedy dána funkce $y = f(x),\ x \in D(f)$. Derivací funkce $f(x)$ v bodě *x* nazýváme hodnotu, ke které se „neomezeně“ blíží (pokud existuje) zlomek $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, pokud $h \to 0$ (pro $h = 0$ zlomek nemá smysl, ale toto omezení nemá na výsledek vliv).

Výraz $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ je podíl přírůstku funkce $\Delta f \equiv f(x+h) - f(x)$ (který odpovídá přírůstku *h* nezávisle proměnné *x*) a přírůstku *h*. Derivace funkce se obvykle značí f'(x). V některých příkladech výpočet derivace nečiní velký problém. Např. pro funkci $y = x^3$ se zabýváme výrazem

$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$

Lze snadno usoudit, že pokud $h \to 0$, pak $3xh \to 0$ (pro libovolné x) i $h^2 \to 0$. Tedy $(x^3)' = 3x^2$.

Derivace funkce je pravidlo, které dané funkci přiřadí novou funkci – její derivaci $f'(x)$, $D(f') \subset D(f)$. V tabulce II na str. 62 skript naleznete pravidla, jak se derivují některé základní elementární funkce. Na str. 63 skript jsou poučky, jak derivovat algebraické operace libovolných dvou funkcí.

Tak např. funkce $y = xe^x$ je součinem dvou funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = e^x$. Použijeme tedy pravidlo pro derivaci součinu $(f.g)' = f'g + fg'$. V našem případě $(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. Ve všech testech budou zadány pouze lehčí příklady na derivaci a její aplikaci.

Geometrický význam derivace. Platí $f'(x) = k$, tedy derivace funkce v bodě x je rovna směrnici tečny sestrojené v bodě $[x, f(x)]$ ke grafu funkce $y = f(x)$. Odtud lze usoudit, že funkce nemá derivaci v bodech, ve kterých nelze sestrojit tečnu (v těch bodech má graf funkce zlom, není hladký).

Aplikace derivace. Funkce monotonní. Platí např. Věta 1: Je-li derivace f' kladná ve všech bodech intervalu I, pak je na tomto intervalu rostoucí. Analogicky další alternativy. Jde o velmi užitečnou poučku. Ve složitějších příkladech není jiná možnost, než pomocí derivace rozhodnout o monotonnosti funkce.

Např. funkce $y = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ má derivaci $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Protože platí $y' < 0$ pro $x \in (e, \infty)$, je naše funkce na tomto intervalu klesající.

Důležitou aplikaci má Věta 2: Má-li funkce $f(x)$ v bodě x lokální extrém, pak nutně v tomto bodě je $f'(x) = 0$.

Tedy kořeny rovnice $f'(x) = 0$ jsou body „podezřelé“ z extrému. Např. funkce $y = x^3$ má derivaci pro $x = 0$ nulovou, ale extrém v tomto bodě nevykazuje.

Ovšem pokud funkce $f'(x)$ v bodě x mění znaménko a platí $f'(x) = 0$, pak zde extrém nastává. Stačí užít Větu 1. Rozmyslete obě situace a rozhodněte, zdali jde o lokální maximum nebo minimum.

Funkce $y = \frac{\ln x}{x}$ má derivaci kladnou na $(0, e)$ $zápornou$ na (e, ∞), tedy v bodě e má ostré lokální maximum, které je „globálním“ maximem.

Neurčitý integrál. Jedná se o operaci opačnou k derivaci: Je dána funkce $f(x)$ na intervalu *I*. Hledáme funkci $F(x)$, pro kterou $F' = f$. Funkce F se nazývá primitivní funkcí k funkci f na intervalu *I*, též neurčitým integrálem. Funkce F nemusí existovat (existuje, pokud f je spojitá). Metod výpočtu je více, my se omezíme na několik příkladů integrace elementárních funkcí daných tab. III str. 67 a použijeme poučky, str. 66 skript. O správnosti výpočtu integrálu se tedy lze přesvědčit derivací.

Integrace je obtížnější operace než derivace. Integrál z funkce $y = e^{-x^2}$, který existuje na *R*, se nedá vyjádřit vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Určitý integrál. Určitý integrál budeme definovat použitím Newtonovy formule. Ta dává elegantní metodu výpočtu hodnoty určitého integrálu, nemá však geometrickou názornost. Ta je formulována poučkou uvedenou níže. Určitý integrál se označuje symbolem $\int_a^b f(x)dx$, kde *a* je dolní, *b* je horní mez integrálu ∫ je symbol integrace, význam symbolu *dx* nespecifikujeme.

Newtonova formule: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, kde funkce F je primitivní k *f* na $\langle a, b \rangle$, tedy $F' = f$.

Geometrický význam určitého integrálu. Pokud je funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná, pak číslo $\int_a^b f(x)dx$ udává velikost plochy obrazce, který je znázorněn na obr. 6.1 na str. 69 skript.

Nevlastní integrál. Jeho zavedení je nutné k definici distribuční funkce v pravděpodobnosti. Vystačíme s případem, kdy alespoň jedna mez integrálu je nevlastní, tj. rovna $\pm\infty$. Pro jeho výpočet platí opět Newtonova formule s tou korekcí, že pokud je např. horní mez $b = \infty$, pak hodnotu $F(\infty)$ chápeme ve smyslu mezní hodnoty (limity), tj. čísla, ke kterému se blíží $F(x)$, pokud číslo $x \to \infty$.

Příklad. Spočtěte nevlastní integrál (načrtněte si obrázek):

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_1^\infty = 0 - (-1)$, protože $-\frac{1}{x} \to 0$ pokud $x \to \infty$.

Při testech budou vždy k dispozici vzorce pro výpočet derivací a integrálů.

Hodnoty určitých integrálů se v praxi počítají numericky na počítačích, zejména není-li k dispozici primitivní funkce.

Ukázka průběžného testu:

1. Nakreslete graf funkce $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. (Volte např. $x = \frac{1}{2}, 1, 2.$) Nalezněte její lokální extrémy.
2. Vypočtěte určitý integrál $\int_0^1 (1 + x^2)dx$. Načrtněte obrazec, jehož velikost plochy je dána tímto integrálem.

Ad. 3 **Elementy pravděpodobnosti.** Existuje více způsobů, jak definovat pravděpodobnost náhodného jevu. Zobecněním těchto přístupů lze říci, že pravděpodobnost je funkce definovaná na množině náhodných jevů, která má vždy vlastnosti uvedené na str. 74 skript. Operace mezi náhodnými jevy, které jsou analogické jako operace mezi množinami, jsou uvedeny na str. 71 skript. Zejména pro každý náhodný jev A platí, $P(A) \in \langle 0,1 \rangle$. Základním pojmem teorie pravděpodobnosti je pojem náhodné veličiny. V učebnicích je uvedený pojem popsán většinou jen přibližně, jeho přesná definice je náročná. Pokusíme se ji naznačit. Výchozí je pojem – prostor elementárních jevů. Označuje se Ω a jeho prvky, tj. elementární jevy jsou všechny možné výsledky náhodného pokusu. Označují se ω, viz skripta str. 72. Náhodné veličiny se označují velkými písmeny *X*, *Y*. Jsou kvantitativním (číselným) popisem náhodných pokusů. Je to funkce, která každému elementárnímu jevu ω přiřadí číselnou hodnotu jeho realizace $X(\omega)$. dále se požaduje, aby pro každé reálné číslo *x* podmnožina těch elementárních jevů, pro které $X(\omega) \leq x$ byla náhodným jevem, kterému je přiřazena jeho pravděpodobnost $P(X(\omega) \leq x)$.

Distribuční funkce. Distribuční funkcí náhodné veličiny *X* rozumíme funkci definovanou předpisem $F(x) = P(X \leq x)$. Je definována na *R*, je neklesající a platí $0 \leq F(x) \leq 1$. Popisuje rozdělení pravděpodobnosti (viz níže): přiřazuje pravděpodobnost všem podmnožinám z Ω, které se funkcí *X* zobrazí na interval.

Náhodná veličina se spojitým rozdělením pravděpodobnosti.

Poznámka. Tato situace odpovídá případu, kdy prostor elementárních jevů je nespočetný (počet jeho prvků je roven počtu prvků množiny *R*).

Spojité rozdělení má náhodná veličina X, pro kterou existuje nezáporná funkce f nazývaná hustotou pravděpodobnosti, pro kterou $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt, x \in R$.

Zásadní význam má vzorec $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Rovnost zůstane v platnosti, i když interval vlevo je kteréhokoliv typu, např. platí $a < X \leq b$. Výše uvedená vlastnost plyne z vlastností integrálu.

Kvantily náhodné veličiny se spojitým rozdělením pravděpodobnosti.

100α % kvantilem náhodné veličiny X s distribuční funkcí F je číslo x_α, které je dáno vztahem $P(X \leq x_\alpha) = F(x_\alpha) = \alpha$. Často se volí $\alpha = 0{,}95$.

Normální rozdělení. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry μ a σ, pokud její hustota pravděpodobnosti je dána výrazem na str. 80 skript. Jeho označení $N(\mu, \sigma^2)$. Její graf je znám pod názvem Gaussova křivka. Příslušná distribuční funkce je dána integrálem, který není elementární, viz odstavec o neurčitém integrálu. Navíc je zde závislost na parametrech μ a σ. Lineární substituce $X_N = \frac{X-\mu}{\sigma}$ převádí náhodnou veličinu X na náhodnou veličinu X_N, která se nazývá normovaná a označuje se $N(0, 1)$. Má parametry $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Hodnoty její distribuční funkce $\Phi(x)$ lze nalézt v tabulkách, resp. jako součást statistických programů. Uvedeme nakonec důležitý vzorec výpočtu pravděpodobnosti náhodné veličiny $N(\mu, \sigma^2)$:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Kvantily rozdělení $N(0, 1)$ se označují u_α, jsou rovněž uvedeny v tabulkách. Uvědomte si, že platí vztah $z_\alpha = u_{1-\alpha}$, kde z_α jsou kritické hodnoty, viz skripta str. 82. Jejich geometrický význam viz obr. 7.3 str. 82 skript.

Ukázka závěrečného testu:

1. Načrtněte graf funkce$y = 3x - x^3$. Nalezněte průsečíky grafu s osou x a lokální extrémy funkce.
2. Vypočtěte integrál $\int_{1}^{e^2} \frac{1}{x} dx$. Nakreslete jeho geometrický význam.
3. Náhodná veličina X má rozdělení $N(6, 16)$. Spočtěte pravděpodobnost $P(2 \leq X \leq 12)$.

Příklady z oddílu 3 se budou týkat pouze normálního rozdělení. Tabulky distribuční funkce *Φ* budou dispozici.

Dodatky

1. Na jednoduchém středoškolském pojmu geometrické posloupnosti ukážeme na deduktivní postup v matematice, kdy z definice sledovaného pojmu se odvozují jeho další vlastnosti, příp. vzorce.

Geometrická posloupnost. Jsou dána reálná čísla a_1 a $q \neq 0$ a 1. Číslo a_1 se nazývá první člen geometrické posloupnosti, q je její kvocient. Geometrická posloupnost je definovaná rekurentní formulí $a_{n+1} = a_n . q$. Tedy $a_2 = a_1 . q, a_3 = a_2 . q = a_1 . q^2$. odtud zřejmě $a_n = a_1 . q^{n-1}$, což je vzorec pro *n*-tý člen této posloupnosti.

Částečný součet geometrické posloupnosti (označme jej S_n) je definován výrazem:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 . q + \cdots + a_1 . q^{n-1}$. Odtud

$S_n . q = a_1 . q + \cdots + a_1 . q^n$. Odečtením získáme $S_n . (q-1) = a_1 . (q^n - 1)$, tedy

$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$, což je vzorec pro částečný součet geometrické posloupnosti.

Je-li $|q| < 1$, pak $q^n \to 0$ pokud $n \to \infty$, což znamená, že číslo q^n je libovolné blízké číslu 0 pokud číslo *n* je dostatečně velké.

Nekonečnou geometrickou řadou se nazývá výraz $S_\infty = a_1 + a_1 . q + a_1 . q^2 + \cdots$; tento výraz má smysl pokud $|q| < 1$ a jeho hodnota je dána číslem, ke kterému se blíží S_n, pokud $n \to \infty$. Z výše uvedené úvahy snadno usoudíme, že platí, $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$.

Příklad. Složené úročení. Označíme-li *i* roční úrokovou sazbu vyjádřenou desetinným číslem a Q_0 počáteční hodnotu, pak hodnota za jeden rok činí: $Q_1 = Q_0 + i . Q_0 = Q_0 . (1 + i)$.

Analogicky po *n* letech dostáváme hodnotu $Q_n = Q_0 . (1 + i)^n$. Čísla Q_n, $n = 0, 1, \ldots$ tvoří tedy geometrickou posloupnost s nultým členem Q_0 a kvocientem $1 + i$.

Příklad. Vyjádřete racionální číslo $0,\overline{3}$ zlomkem.

$0,\overline{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{3}{10} . \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{3}$.

Další příklady viz skripta.

Úloha. Stanovte chybu, tedy velikost čísla $|S_\infty - S_n|$, které se dopustíme, pokud číslo S_n nahradíme číslem S_∞.

2. Příklad na aplikaci derivace funkce při popisu jedné zajímavé ekonomické zákonitosti z neoklasické teorie.

Z mikroekonomie je známá funkce, která v dané firmě popisuje závislost celkových nákladů T_C na vyráběném množství Q při zvoleném časovém úseku: $C = TC(Q)$.

Graf této funkce viz literatura na konci tohoto odstavce, str. 19. Zmíněný graf je „kvantitativně“ závislý na zvolené firmě, ale jeho „kvalitativní tvar“ je na ní víceméně nezávislý. Z matematického hlediska se jedná o funkci definovanou na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$, je zde rostoucí, obecně není lineární a má zde derivaci. Její další vlastnosti nespecifikujeme.

Její analytický vzorec pro danou firmu lze získat z naměřených, resp. napozorovaných diskrétních hodnot $(Q_i, TC(Q_i))$ matematicko-statistickými metodami. Více o tomto tématu se lze dozvědět v magisterském studiu.

Funkce $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$ udává průměrné náklady. Lze předpokládat, že je definovaná na intervalu $(0, \infty)$, $AC(Q) \to \infty$ pro $x \to 0^+$ a pro $x \to \infty$. Dále, že je na intervalu $(0, Q_0)$ klesající, na (Q_0, ∞) roste, v Q_0 má minimum.

Důležitou roli v neoklasické teorii má pojem „mezních nákladů“. K posouzení jeho důležitosti ve sledovaných zákonitostech není nutné použít diferenciálního počtu, pak ale výklad není zcela přesný.

Mezní náklady $MC(Q)$ v ekonomické interpretaci ukazují o kolik je třeba zvýšit celkové náklady TC na výrobu další jednotky produkce, tj. proměnné Q. Tedy

$MC(Q) = \frac{\Delta TC(Q)}{\Delta Q}$; symbol $\Delta TC(Q)$ označuje přírůstek celkových nákladů TC odpovídající přírůstku ΔQ proměnné Q. Pokud $\Delta Q \equiv 1$, pak jsou mezní náklady číselně rovny přírůstku ΔTC. veličina $\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$ ale závisí na velikosti ΔQ, a tedy nevystihuje okamžitou „míru změny“ funkce TC v bodě Q. (Srovnejte s pojmy okamžitá a průměrná rychlost u odstavce derivace.) Zcela vyhovuje „mezní hodnota“ tohoto zlomku, tj. hodnota, ke které se $\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$ blíží, pokud $\Delta Q \to 0$. To znamená, že účelné je definovat mezní náklady jako derivaci celkových nákladů: $MC(Q) = TC'(Q)$.

Tato definice dává shodnou ekonomickou interpretaci. Stačí si uvědomit platnost aproximace $\frac{\Delta TC(Q)}{\Delta Q} \doteq TC'(Q)$ a volit $\Delta Q \equiv 1$. Vyslovte tuto interpretaci. Navíc je nám k dispozici celý kalkulus diferenciálního počtu.

Obvyklé tvary grafů funkcí $AC(Q)$ a $MC(Q)$ jsou uvedeny v literatuře uvedené níže. Z jejich průběhů se usuzuje, že graf mezních nákladů protíná graf průměrných nákladů v jeho minimu. Tento fakt má důležitou ekonomickou interpretaci. (Opět viz literatura.)

Exaktní platnost tohoto tvrzení dostaneme snadno aplikací diferenciálního počtu za zcela obecných předpokladů o funkci *TC*. Zřejmé platí:

$$AC'(Q) = \left(\frac{TC(Q)}{Q}\right)' = \frac{TC'(Q).Q - TC(Q)}{Q^2} = \frac{MC(Q) - AC(Q)}{Q}.$$

V minimu $(Q = Q_0)$ je tato derivace nulová, tedy $MC(Q_0) = AC(Q_0)$, což je naše tvrzení.

Literatura:

Vlček, J., a kol.: Ekonomie a ekonomika, Praha, ASPI, 2005.